ÜBER DIE INFINITESIMALE DEFORMATION DER MINIMALFLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KGL. BAYER. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT

AM 23. JUNI 1908

VON

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

JOSEF ZILLIG

AUS

EBENSFELD.

WÜRZBURG.

DRUCK DER KGL. UNIVERSITÄTS-DRUCKEREI VON H. STÜRTZ

1908.

REFERENT: PROFESSOR DR. G. ROST.

Einleitung.

Die infinitesimale Deformation einer biegsamen, aber unausdehnbaren Fläche S besteht darin, daß man jedem Punkte der Fläche mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eine unendlich kleine Verschiebung erteilt, deren Komponenten nach den Achsen durch

$$\delta x = \varepsilon x_1; \ \delta y = \varepsilon y_1; \ \delta z = \varepsilon z_1$$

gegeben seien. Dabei ist ε eine beliebige unendlich kleine Konstante. Die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ eines Punktes der auf diese Weise entstehenden Fläche $\bar{S}$ sind dann:

$$(1.) \qquad \bar{x} = x + \varepsilon x_1, \ \bar{y} = y + \varepsilon y_1, \ \bar{z} = z + \varepsilon z_1.$$

Da die Linienelemente der Flächen S und $\bar{S}$ ineinander übergehen müssen, ergibt sich aus:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2,$$

wenn höhere als die 1. Potenzen von ε vernachlässigt werden, daß die Funktionen x_1, y_1, z_1 mit den Funktionen x, y, z durch die totale Differentialgleichung:

$$(A.) \qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

verbunden sind.

Auf Anregung des Herrn Universitätsprofessors Dr. A. Voß in München versuchte ich, die spezielle Aufgabe, die Gleichungen solcher Minimalflächen aufzustellen, für welche sich das Problem der infinitesimalen Deformation in allgemeinster Weise lösen läßt, zu behandeln.

Was den Gang der Untersuchungen anlangt, so sollen in einem ersten, allgemeinen Teil im Anschluß an die Entwicklungen bei Darboux, Sur la théorie générale des surfaces, t. IV., p. 25 ff., die

Gleichungen aufgestellt werden, von denen die Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation für die Minimalflächen abhängt. Desgleichen sollen die analytischen Hilfsmittel und die Sätze aus der allgemeinen Theorie der Minimalflächen und der Differentialgleichungen kurz zusammengestellt werden, welche die Diskussion bei den speziellen Untersuchungen vereinfachen und überhaupt zur Bestimmung der Flächen verwendet werden. Im zweiten Teile sollen die Untersuchungen für die speziellen Fälle durchgeführt werden.

Kapitel I.

Allgemeine Untersuchungen über die infinitesimale Deformation der Minimalflächen.

§ 1.

Die infinitesimale Deformation beliebiger Flächen.

Das Problem der infinitesimalen Deformation einer beliebigen Fläche S kann mit Hilfe der Lelieuvreschen Formeln, wie folgt, behandelt werden.

Bezieht man die Fläche S auf die Asymptotenlinien als Parameterkurven (Parameter α, β), so ergeben die Lelieuvreschen Formeln die Ausdrücke:

(1.) $$x_\alpha = \Theta_2 \Theta_{3\alpha} - \Theta_3 \Theta_{2\alpha}\text{[1]}; \quad x_\beta = \Theta_2 \Theta_{3\beta} - \Theta_3 \Theta_{2\beta}$$

nebst den analogen für y und z, die durch zyklische Vertauschung der Größen Θ_1, Θ_2, Θ_3 gewonnen werden. Dabei müssen, wie sich aus der Integrabilitätsbedingung für die Gleichungen (1.) ergibt, Θ_1, Θ_2, Θ_3 3 partikuläre Lösungen der Moutard-Laplaceschen Differentialgleichung 2. Ordnung:

(2.) $$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial\alpha\partial\beta} = M\Theta$$

sein. Die Gleichungen (1.) lassen sich in die beiden für beliebige Werte der a_i ($i = 1, 2, 3$) geltenden Identitäten zusammenfassen:

(3.) $$a_1 x_\alpha + a_2 y_\alpha + a_3 z_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & \Theta_1 & \Theta_{1\alpha} \\ a_2 & \Theta_2 & \Theta_{2\alpha} \\ a_3 & \Theta_3 & \Theta_{3\alpha} \end{vmatrix}$$

und

(3'.) $$a_1 x_\beta + a_2 y_\beta + a_3 z_\beta = - \begin{vmatrix} a_1 & \Theta_1 & \Theta_{1\beta} \\ a_2 & \Theta_2 & \Theta_{2\beta} \\ a_3 & \Theta_3 & \Theta_{3\beta} \end{vmatrix}.$$

---

[1]) $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha}$; $x_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta}$; analog $\Theta_{i\alpha}$, $\Theta_{i\beta}$ für $i = 1, 2, 3$.

Setzt man in diesen Gleichungen (3.), (3′.) $a_i = \Theta_i$, $i = 1, 2, 3$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(4.)\qquad \Theta_1 x_\alpha + \Theta_2 y_\alpha + \Theta_3 z_\alpha = 0,$$

$$(4'.)\qquad \Theta_1 x_\beta + \Theta_2 y_\beta + \Theta_3 z_\beta = 0,$$

welche ausdrücken, daß die Größen Θ den Richtungskosinussen X, Y, Z der Flächennormale proportional sind. Man kann also setzen:

$$(5.)\qquad rX = \Theta_1,\ rY = \Theta_2,\ rZ = \Theta_3.$$

Dabei hat der Proportionalitätsfaktor r eine einfache geometrische Bedeutung, welche aus dem Vergleich des Linienelementes der Fläche S mit dem Linienelement ihrer durch parallele Normalen vermittelten sphärischen Abbildung erhellt. Es ist[1]), wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche S sind:

$$r^2 = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

Setzt man in den Gleichungen (3.), (3′.) $a_1 = dx_1\, d\alpha$, $a_2 = dy_1\, d\alpha$, $a_3 = dz_1\, d\alpha$ und $a_1 = dx_1\, d\beta$, $a_2 = dy_1\, d\beta$, $a_3 = dz_1\, d\beta$, so erhält man 2 neue Gleichungen, aus denen durch Addition unter Berücksichtigung der in der Einleitung aufgestellten Differentialgleichung (A.) folgende Gleichung resultiert:

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} x_{1\alpha} & \Theta_1 & \Theta_{1\alpha} \\ y_{1\alpha} & \Theta_2 & \Theta_{2\alpha} \\ z_{1\alpha} & \Theta_3 & \Theta_{3\alpha} \end{vmatrix} d\alpha^2 + \left\{ \begin{vmatrix} x_{1\beta} & \Theta_1 & \Theta_{1\alpha} \\ y_{1\beta} & \Theta_2 & \Theta_{2\alpha} \\ z_{1\beta} & \Theta_3 & \Theta_{3\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{1\alpha} & \Theta_1 & \Theta_{1\beta} \\ y_{1\alpha} & \Theta_2 & \Theta_{2\beta} \\ z_{1\alpha} & \Theta_3 & \Theta_{3\beta} \end{vmatrix} \right\} d\alpha\, d\beta + \begin{vmatrix} x_{1\beta} & \Theta_1 & \Theta_{1\beta} \\ y_{1\beta} & \Theta_2 & \Theta_{2\beta} \\ z_{1\beta} & \Theta_3 & \Theta_{3\beta} \end{vmatrix} d\beta^2 =$$

Da diese Gleichung für beliebige Werte von $d\alpha$, $d\beta$ erfüllt sein muß, so müssen die einzelnen Koeffizienten der Null gleich sein. Durch Nullsetzen der Koeffizienten von $d\alpha^2$ und $d\beta^2$ erhält man den Ansatz:

$$(7.)\quad \begin{cases} x_{1\alpha} = A\,\Theta_1 + B\,\Theta_{1\alpha},\ y_{1\alpha} = A\,\Theta_2 + B\,\Theta_{2\alpha},\ z_{1\alpha} = A\,\Theta_3 + B\,\Theta_{3\alpha}, \\ x_{1\beta} = A_1\Theta_1 + B_1\Theta_{1\beta},\ y_{1\beta} = A_1\Theta_2 + B_1\Theta_{2\beta},\ z_{1\beta} = A_1\Theta_3 + B_1\,\Theta_{3\beta}, \end{cases}$$

und durch Einführung dieser Werte in den Koeffizienten von $d\alpha d\beta$:

$$(8.)\qquad (B + B_1) \begin{vmatrix} \Theta_{1\beta} & \Theta_1 & \Theta_{1\alpha} \\ \Theta_{2\beta} & \Theta_2 & \Theta_{2\alpha} \\ \Theta_{3\beta} & \Theta_3 & \Theta_{3\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Determinante $\Sigma \pm \Theta_\beta \Theta \Theta_\alpha$ zugleich mit $\Sigma \pm X X_\alpha X_\beta \neq 0$, so muß $B = -B_1$ sein. Setzt man dafür in neuer Bezeichnungs-

---

[1]) cf. Darboux, t. IV. p. 30.

weise ω, so lassen sich die Integrabilitätsbedingungen für das System der Gleichungen (7.) in die folgende Form bringen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2M\omega\right)\Theta_1 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + A_1\right)\frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} + \left(A - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} = 0, \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2M\omega\right)\Theta_2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + A_1\right)\frac{\partial \Theta_2}{\partial \alpha} + \left(A - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \Theta_2}{\partial \beta} = 0, \\ \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2M\omega\right)\Theta_3 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + A_1\right)\frac{\partial \Theta_3}{\partial \alpha} + \left(A - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial \Theta_3}{\partial \beta} = 0. \end{cases}$$

Da die Determinante $\Sigma \pm \Theta\,\Theta_\alpha\,\Theta_\beta$ nicht verschwindet, müssen die einzelnen Klammerausdrücke gleich Null gesetzt werden. Es muß also zunächst sein: $A = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$; $A_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}$. Durch Einführung dieser Werte in den Koeffizienten von Θ_i ist ersichtlich, daß die Gleichungen (7.) nur dann ein integrables System bilden, wenn ω eine Lösung der Moutard-Laplaceschen Gleichung:

$$(B.)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = M\omega$$

ist. Alsdann lassen sich dx_1, dy_1, dz_1 in folgender Weise darstellen:

$$(10.)\quad \begin{cases} dx_1 = (\Theta_1\,\omega_\alpha - \Theta_{1\alpha}\,\omega)\,d\alpha - (\Theta_1\,\omega_\beta - \Theta_{1\beta}\,\omega)\,d\beta, \\ dy_1 = (\Theta_2\,\omega_\alpha - \Theta_{2\alpha}\,\omega)\,d\alpha - (\Theta_2\,\omega_\beta - \Theta_{2\beta}\,\omega)\,d\beta, \\ dz_1 = (\Theta_3\,\omega_\alpha - \Theta_{3\alpha}\,\omega)\,d\alpha - (\Theta_3\,\omega_\beta - \Theta_{3\beta}\,\omega)\,d\beta. \end{cases}$$

Die aus diesen Gleichungen durch Integration gewonnenen Funktionen x_1, y_1, z_1 werden, wenn ω das allgemeine Integral der Differentialgleichung (B.) darstellt, die allgemeinsten Werte sein, welche zusammen mit den aus (1.) zu ermittelnden Funktionen x, y, z die totale Differentialgleichung (A.) $dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$ befriedigen. Die Koordinaten der Punkte der durch infinitesimale Deformation der Fläche S entstehenden Fläche $\overline{S}$ werden dann aus den in der Einleitung aufgestellten Relationen (1.) gefunden. Dabei hat man sich den Vorgang bei der Deformation so vorzustellen.

Der Punkt (x, y, z) nimmt vermöge der Deformation, deren Komponenten εx_1, εy_1, εz_1 sind, die Lage $x + \varepsilon x_1$, $y + \varepsilon y_1$, $z + \varepsilon z_1$ an. Die Größe der relativen Verschiebung für die in unmittelbarer Nähe von (x, y, z) befindlichen Punkte $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ wird durch die Komponenten εdx_1, εdy_1, εdz_1 gegeben. Diese Komponenten lassen sich näher charakterisieren.

Leitet man aus den Gleichungen (10.) durch passende Verbindung die Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \Theta_2 dx_1 - \Theta_1 dy_1 = \omega dz, \\ \Theta_3 dy_1 - \Theta_2 dz_1 = \omega dx, \\ \Theta_1 dz_1 - \Theta_3 dx_1 = \omega dy, \end{cases}$$

ab, wählt Θ_2 und $-\Theta_3$ als Multiplikatoren der 1. bezw. 3. Gleichung und addiert diese beiden Gleichungen, so erhält man zunächst:

$$\omega(\Theta_2 dz - \Theta_3 dy) = \Theta_2^2 dx_1 - \Theta_1 \Theta_2 dy_1 + \Theta_3^2 dx_1 - \Theta_1 \Theta_3 dz_1 + \Theta_1^2 dx_1 - \Theta_1^2 dx_1$$

woraus unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.), da $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 = r^2$ gesetzt werden kann, dx_1 berechnet wird. Man findet so die Formeln:

$$(12.)\quad \begin{cases} dx_1 = \frac{\omega}{r}(Y dz - Z dy) + \frac{\Theta_1}{r}(X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1), \\ dy_1 = \frac{\omega}{r}(Z dx - X dz) + \frac{\Theta_2}{r}(X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1), \\ dz_1 = \frac{\omega}{r}(X dy - Y dx) + \frac{\Theta_3}{r}(X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1), \end{cases}$$

welche ausdrücken, daß die Verrückungen, durch welche die benachbarten Punkte in die neue Lage gebracht werden, in einer Rotation um die Flächennormale von der Größe $\frac{\omega}{r}$ und in einer Translation in der Richtung dieser Normalen bestehen.

§ 2.

Anwendung auf die Minimalflächen.

Um im Falle der Minimalflächen die Gleichung, von der die Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation abhängt, zu erhalten, gehen wir aus von den Gleichungen der Minimalflächen in der Weierstraßschen Form:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0 = \int(1 - u_1^2) F_1(u_1) du_1 + \int(1 - u_2^2) F_2(u_2) du_2, \\ y_0 = i\int(1 + u_1^2) F_1(u_1) du_1 - i\int(1 + u_2^2) F_2(u_2) du_2, \\ z_0 = 2\int u_1 F_1(u_1) du_1 + 2\int u_2 F_2(u_2) du_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen werden die Gleichungen der zur Fläche (x_0, y_0, z_0) gehörigen assoziierten Flächen gewonnen, wenn man $F_1(u_1)$ ersetzt durch $e^{i\varphi} F_1(u_1)$ und $F_2(u_2)$ durch $e^{-i\varphi} F_2(u_2)$. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man speziell nach H. O. v. Bonnet die zur Fläche

(x_0, y_0, z_0) adjungierte Fläche, deren Koordinaten somit durch folgende Ausdrücke bestimmt sind:

$$(2.)\quad \begin{cases} x = i\int(1-u_1^2)F_1(u_1)du_1 - i\int(1-u_2^2)F_2(u_2)du_2, \\ y = -\int(1+u_1^2)F_1(u_1)du_1 - \int(1+u_2^2)F_2(u_2)du_2, \\ z = 2i\int u_1 F_1(u_1)du_1 - 2i\int u_2 F_2(u_2)du_2. \end{cases}$$

Dabei besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Reellität der Flächen — es sollen sich die folgenden Untersuchungen auf reelle Minimalflächen beschränken — darin, daß $F_1(u_1)$ und $F_2(u_2)$ konjugiert komplexe Funktionen der konjugiert komplexen Variablen u_1, u_2, der Parameter der Minimalkurven, sind. Es sei hier gleich vorweggenommen, daß bei der Behandlung des vorgelegten Problemes für $F_1(u_1)$ und $F_2(u_2)$ nur Funktionen auftreten, bei denen die vorkommenden Konstanten reell sind; für diese Funktionen, die sich also nur im Argumente unterscheiden, werde die einheitliche Bezeichnung $F(u_1)$ bezw. $F(u_2)$ eingeführt, eine Festsetzung, die sich sinngemäß auf die im Laufe der Untersuchungen noch einzuführenden Funktionen erstrecken möge. Desgleichen trete u an Stelle von u_1 und u_2, wenn die Untersuchungen sich in gleicher Weise auf die Argumente u_1 und u_2 erstrecken; erst im Endresultat sollen die Indizes angefügt werden. Auch diese Festsetzungen sollen sinngemäße Anwendung auf die für u_1 und u_2 einzuführenden Variablen finden.

Nun trete an Stelle des Kurvensystems u_1, u_2 auf der Fläche das Kurvensystem v_1, v_2, das mit dem Kurvensystem u_1, u_2 durch die Relationen:

$$(3.)\qquad v_1 = \int\sqrt{F(u_1)}\,du_1\,; \quad v_2 = \int\sqrt{F(u_2)}\,du_2$$

verknüpft ist. Dann werden umgekehrt durch diese Gleichungen u_1 bezw. u_2 als Funktionen von v_1 bezw. v_2 definiert. Als Ausdruck dieser Funktionalabhängigkeit werde die Signatur $W(v_1)$ bezw. $W(v_2)$ eingeführt, es sei also:

$$(4.)\qquad u_1 = W(v_1), \; u_2 = W(v_2).$$

Alsdann lassen sich $F(u_1)$ und $F(u_2)$ als Funktionen von $W(v_1)$ und $W(v_2)$ darstellen. Es ergeben sich aus den Gleichungen (3.) die Beziehungen:

$$(5.)\qquad F(u_1) = \frac{1}{W'^2(v_1)}, \quad F(u_2) = \frac{1}{W'^2(v_2)}.$$

Infolgedessen nehmen die Koordinaten der Punkte (x, y, z) der adjungierten Fläche, ausgedrückt durch v_1, v_2, $W(v_1)$, $W(v_2)$, die folgenden Formen an:

$$(6.)\quad \begin{cases} x = i\int \frac{W^2(v_1)-1}{W'(v_1)}\,dv_1 - i\int \frac{W^2(v_2)-1}{W'(v_2)}\,dv_2, \\ y = \int \frac{W^2(v_1)+1}{W'(v_1)}\,dv_1 + \int \frac{W^2(v_2)+1}{W'(v_2)}\,dv_2, \\ z = 2i\int \frac{W(v_1)}{W'(v_1)}\,dv_1 \quad - 2i\int \frac{W(v_2)}{W'(v_2)}\,dv_2. \end{cases}$$

Hätte man an Stelle der Größen v_1, v_2 die mit dem beliebigen konstanten, bei den folgenden Untersuchungen reellen Faktor h multiplizierten Werte hv_1, hv_2 in die Gleichungen (6.) eingeführt, so hätte man, wie aus (2.) und (3.) folgt, eine Fläche erhalten, die zu der unter (6.) definierten Fläche ähnlich und ähnlich gelegen ist[1]).

Für die Richtungskosinusse der Flächennormale X, Y, Z ergeben sich unter Benützung der Gleichungen (6.) folgende Ausdrücke:

$$(7.)\quad X = \frac{W(v_1)+W(v_2)}{1+W(v_1)\,W(v_2)};\quad Y = i\,\frac{W(v_2)-W(v_1)}{1+W(v_1)W(v_2)};\quad Z = \frac{1-W(v_1)\,W(v_2)}{1+W(v_1)W(v_2)}$$

desgleichen läßt sich das negative Produkt der Hauptkrümmungsradien berechnen. Es ist:

$$(8.)\qquad -R_1 R_2 = \frac{[W(v_1)\,W(v_2)+1]^2}{W'(v_1)\,W'(v_2)}$$

Durch Verbindung der Gleichungen (7.) und (8.) nach § 1 (5.) werden die in § 1 eingeführten Funktionen Θ_1, Θ_2, Θ_3 als Funktionen von v_1 und v_2 ermittelt. Man findet:

$$(9.)\quad \Theta_1 = \frac{W(v_1)+W(v_2)}{\sqrt{W'(v_1)\,W'(v_2)}};\quad \Theta_2 = i\,\frac{W(v_2)-W(v_1)}{\sqrt{W'(v_1)\,W'(v_2)}};\quad \Theta_3 = \frac{1-W(v_1)\,W(v_2)}{\sqrt{W'(v_1)\,W'(v_2)}}$$

Nun treten aber bei den allgemeinen Untersuchungen in § 1 Θ_1, Θ_2, Θ_3 als Funktionen der Parameter α, β der Asymptotenlinien auf. Es muß also, damit die Entwicklungen des § 1 auf die Minimalflächen Anwendung finden können, der Zusammenhang zwischen den Parametern (v_1, v_2) der Minimalkurven und den Parametern (α, β) der Asymptotenlinien ermittelt werden. Das geschieht durch Aufstellung der Differentialgleichung für die Asymptotenlinien. Diese lautet:

$$dv_1^2 - dv_2^2 = 0.$$

Aus ihr wird durch Quadratur die endliche Gleichung gefunden. Es ist zu setzen:

$$v_1 + v_2 = \alpha;\ v_1 - v_2 = \beta,$$

[1]) cf. Darboux, t. I. p. 315.

woraus umgekehrt:

$$v_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}; \; v_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

gefolgert wird. Denkt man sich diese Werte für v_1 und v_2 in die Gleichungen (9.) eingeführt, so sind Θ_1, Θ_2, Θ_3 Funktionen der Parameter (α, β).

Die Differentialgleichung, von der die infinitesimale Deformation der Minimalflächen abhängt, wird nun in der Weise ermittelt, daß M in der Gleichung (B.) so bestimmt wird, daß Θ_1, Θ_2, Θ_3 [Gleichungen (9.)] 3 partikuläre Lösungen sind. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\Theta_1}\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{1}{\Theta_2}\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{1}{\Theta_3}\frac{\partial^2 \Theta_3}{\partial\alpha\partial\beta} = \left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{W'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{W'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{W'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{W'\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}} \right]$$

Es erscheinen somit Θ_1, Θ_2, Θ_3, wenn man v_1, v_2 als unabhängige Variable beibehält, als 3 partikuläre Lösungen der Differentialgleichung:

$$\text{(C.)} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v_1)}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{W'(v_1)}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v_2)}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{W'(v_2)}}} \right] \Theta.$$

Diese Differentialgleichung hat aber, durch die Parameter α, β ausgedrückt, die Form

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial\alpha\partial\beta} = [\varphi_1(\alpha+\beta) - \varphi_2(\alpha-\beta)]\Theta,$$

ist also eine harmonische Differentialgleichung zweiter Ordnung. Somit hängt die Bestimmung der infinitesimalen Deformation der Minimalflächen von der Integration der allgemeinen harmonischen Differentialgleichung ab[1]).

§ 3.

Bestimmung der allgemeinen Funktion F(u).

Die zu behandelnde Aufgabe kann jetzt so formuliert werden: Sollen die Gleichungen solcher Minimalflächen aufgestellt werden,

---

[1]) cf. Darboux IV, p. 92, 93.

deren infinitesimale Deformation in allgemeinster Weise angegeben werden kann, so sind diejenigen Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta} = [\varphi(\alpha+\beta) - \varphi(\alpha-\beta)]\,\Theta \text{ oder } \frac{\partial^2 \Theta}{\partial {v_1}^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial {v_2}^2} = [\varphi(v_1) - \varphi(v_2)]\,\Theta$$

aufzusuchen, deren allgemeines Integral bekannt ist. Die Funktionen $W(v_1)$, $W(v_2)$, welche zur Bestimmung der Flächen führen, können dann gewonnen werden, wenn man beachtet, daß jede solche harmonische Differentialgleichung unbegrenzt viele partikuläre Integrale von der Form $\eta(v_1)\,\eta(v_2)$ zuläßt[1]), soferne $\eta(v_1)$, $\eta(v_2)$ Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta}{dv^2} = \eta[\varphi + h] \tag{1.}$$

— h beliebige reelle Konstante — sind. Ist also für die Funktionen $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ das allgemeine Integral ω der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial {v_1}^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial {v_2}^2} = [\varphi(v_1) - \varphi(v_2)]\,\Theta$ bekannt, so werden die Funktionen $W(v_1)$, $W(v_2)$, die zur Bestimmung der Minimalflächen führen, deren allgemeinste infinitesimale Deformation durch das allgemeine Integral ω vermittelt wird, mit Hilfe des Ansatzes:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{W'}}\right)'' = (\varphi + h)\,\frac{1}{\sqrt{W'}} \tag{2.}$$

gewonnen. Sind $\frac{1}{\sqrt{W'_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{W'_2}}$ 2 linearunabhängige partikuläre Integrale dieser Differentialgleichung, so ist das allgemeine Integral derselben:

$$\frac{1}{\sqrt{W'}} = a\,\frac{1}{\sqrt{W'_1}} + b\,\frac{1}{\sqrt{W'_2}}, \text{ a, b beliebige komplexe Konstante.} \tag{3.}$$

Nach Gleichung (5.) in § 2 werden die W e i e r s t r a ß schen Funktionen $F(u_1)$, $F(u_2)$ ermittelt. Es ergibt sich, ausführlich angeschrieben:

$$\begin{cases} F(u_1) = \left[a_1 \frac{1}{\sqrt{W'_1(v_1)}} + b_1 \frac{1}{\sqrt{W'_2(v_1)}}\right]^4, \\ F(u_2) = \left[a_2 \frac{1}{\sqrt{W'_1(v_2)}} + b_2 \frac{1}{\sqrt{W'_2(v_2)}}\right]^4, \end{cases} \tag{4.}$$

wobei a_1 a_2 und b_1, b_2 konjugiert komplexe Konstante sind.

---

[1]) cf. D a r b o u x II, p. 192—212.

Man erhält somit aus jeder Differentialgleichung der Form (2.) eine unbegrenzte Anzahl von Funktionen $F(u_1)$, $F(u_2)$ und damit eine unbegrenzte Anzahl von Flächen, die von den willkürlichen Größen a_1, a_2, b_1, b_2 abhängen.

§ 4.

Reduktion der allgemeinen Funktion F(u) auf die einfachste Form.

Die soeben aufgestellten allgemeinen Werte der Funktionen $F(u_1)$, $F(u_2)$ lassen eine Umgestaltung zu, wodurch einerseits die Bedeutung der willkürlichen Größen a_i, b_i $(i = 1,2)$ klargelegt, andererseits die Diskussion der Flächen vereinfacht wird. Diese beruht darauf, daß die 2 linearunabhängigen Integrale $\frac{1}{\sqrt{W'_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{W'_2}}$ der Differentialgleichung $\left(\frac{1}{\sqrt{W'}}\right)'' = [\varphi + h]\frac{1}{\sqrt{W'}}$ sich durcheinander ausdrücken lassen. Eliminiert man nämlich aus den Bedingungsgleichungen für die beiden Lösungen:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\right)'' = [\varphi + h]\frac{1}{\sqrt{W'_1}} \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{W'_2}}\right)'' = [\varphi + h]\frac{1}{\sqrt{W'_2}}$$

den Ausdruck $[\varphi + h]$, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Integralen in der Form:

$$\text{(1.)} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{W'_2}}\right)'' \frac{1}{\sqrt{W'_1}} - \frac{1}{\sqrt{W'_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\right)'' = 0,$$

woraus durch Quadratur:

$$\text{(2.)} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{W'_2}}\right)' \frac{1}{\sqrt{W'_1}} - \frac{1}{\sqrt{W'_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\right)' = c$$

gefunden wird. Dabei bezeichnet c eine von der Natur der partikulären Integrale abhängige Konstante. Dividiert man die linke und rechte Seite der Gleichung (2.) durch $\left(\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\right)^2$, so kann die linke Seite als Differentialquotient des Quotienten der partikulären Lösungen geschrieben werden. Durch Quadratur findet man dann:

$$\text{(3.)} \qquad \frac{1}{\sqrt{W'_2}} = c\,\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\,W_1,$$

wobei die Integrationskonstante aus geometrischen Erwägungen wegge-

lassen werden kann. Ersetzt man in den Formeln (4.) des § 3 $\frac{1}{\sqrt{W'_2}}$ durch den Ausdruck in der Gleichung (3.) und führt die Betrachtung durch unter Fortlassung der Indizes, so kann man F(u) ausdrücken durch W_1 und die Derivierte nach v. Es ist:

$$(4.)\qquad F(u) = [a + d\,W_1]^4 \frac{1}{W'^2_1},$$

wenn $d = b\,c$ gesetzt wird. Die Bedeutung des hier auftretenden Faktors $[a + d\,W_1]^4$ kann durch die folgende Erwägung klar gelegt werden[1]).

Eine beliebige Translation der Fläche im Raume ist ohne Einfluß auf die unabhängige Variable, während eine beliebige Rotation der Fläche um den Koordinatenanfangspunkt in einer linearen Substitution der unabhängigen Variablen ihren analytischen Ausdruck findet. Ohne daß dadurch die Gestalt der Fläche geändert wird, kann ich also, in der Gleichung (4.) W_1 als die unabhängig Variable auffassend, für diese Variable eine lineare Funktion der Variablen τ einführen. Ich wähle:

$$(5.)\qquad W_1 = \frac{d_1 e^{i\sigma}\tau + a_2 e^{-i\sigma}}{d_2 e^{-i\sigma} - a_1 e^{i\sigma}\tau},$$

— a_1, a_2, d_1, d_2 konjugiert komplex, σ beliebige reelle Größe. — Alsdann wird die Funktion F(u) eine Funktion der Variablen τ werden, für welche ich die Bezeichnung $\Phi(\tau)$ einführe; es ist also zu setzen:

$$(6.)\quad \Phi(\tau) = \frac{(a_1 a_2 + d_1 d_2)^2}{(d_2 e^{-i\sigma} - a_1 e^{i\sigma}\tau)^4} (a_1 a_2 + d_1 d_2)^2 e^{4i\sigma} \left[\frac{d}{d v_1}\left(\frac{d_1 e^{i\sigma}\tau + a_2 e^{-i\sigma}}{d_2 e^{-i\sigma} + a_1 e^{i\sigma}\tau}\right)\right]$$

Aus dieser Darstellungsform erkennt man nun, daß der 1. Faktor $\frac{(a_1 a_2 + d_1 d_2)^2}{(d_2 e^{-i\sigma} + a_1 e^{i\sigma}\tau)^4}$ allein die Lage der Fläche im Raume beeinflußt, also ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der Fläche abgestoßen werden kann. Der 2. reelle Faktor $(a_1 a_2 + d_1 d_2)^2$ beeinflußt nur die Größenverhältnisse der Fläche in der Weise, daß entsprechende Flächen in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt ähnlich und ähnlich gelegen sind. Der 3. Faktor $e^{4i\sigma}$ endlich charakterisiert die assoziierten Flächen. Mache ich nun wieder rückwärts von der Substitution (5.) Gebrauch, dann läßt sich unter Ausscheidung des 1. Faktors und unter Einführung der abkürzenden Schreibweise

---

[1]) cf. Darboux I. p. 305, Form. 21.

s für den reellen Faktor $(a_1 a_2 + d_1 d_2)^2$ und der Schreibweise σ für 4σ die Gleichung (4.) ersetzen durch die einfachere:

$$(7.)\qquad F(u) = \frac{s e^{i\sigma}}{W_1'^2}.$$

Demnach ergeben sich für die zum Schlusse des § 3 aufgestellten allgemeinen Funktionen die speziellen, mit einem partikulären Integral der Differentialgleichung (2.) des § 3 gebildeten Weierstraßschen Funktionen:

$$(8.)\qquad F_1(u_1) = \frac{s e^{i\sigma}}{W_1'^2(v_1)};\quad F_2(u_2) = \frac{s e^{-i\sigma}}{W_1'^2(v_2)}.$$

Man hat demnach das folgende Resultat: Es genügt, um die allgemeinsten Flächen zu erhalten, welche unter Zugrundelegung der Differentialgleichung (2.) des § 3 gewonnen werden können, zur Bestimmung der Flächen ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung zu wählen. Die so gewonnenen Flächen gestatten nebst ihren assoziierten Flächen die allgemeine Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation.

Durch die Wahl eines partikulären Integrales wird aber zugleich auch die Diskussion auf ein Flächenstück M beschränkt, aus dem durch analytische Fortsetzung die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung gewonnen werden kann.

§ 5.

Besondere Form der Gleichungen der Minimalflächen.

Unter Benutzung der beiden partikulären Integrale läßt sich den Ausdrücken für die Koordinaten eines Punktes der Fläche eine bemerkenswerte Form geben, die hier kurz abgeleitet werden soll. Ich nehme an, daß die in § 2 eingeführte Funktion $W(v)$ das mit der in (2.) des § 4 definierten Konstanten c multiplizierte partikuläre Integral $W_1(v)$ ist. Ich setze also:

$$(1.)\qquad W(v) = c\,W_1(v)$$

und führe außerdem in neuer Bezeichnung die Funktionen $G(v)$, $H(v)$ ein durch die Gleichungen:

$$(2.)\qquad \frac{1}{\sqrt{W_1'(v)}} = \sqrt{c}\,G(v);\quad \frac{1}{\sqrt{W_2'(v)}} = \sqrt{c}\,H(v),$$

alsdann besteht zwischen $G(v)$ und $H(v)$ nach (2.) des § 4 die Beziehung:

$$(3.)\qquad G'(v)H(v) - H'(v)G(v) = 1.$$

Die Größen u und F(u) lassen sich ebenfalls durch G(v) und H(v) ausdrücken.

Zunächst ist $u = c W_1(v)$; $F(u) = \frac{1}{c^2 W'^2_1(v)}$, demnach:

$$u = \frac{G(v)}{H(v)} \text{ und } F(u) = H^4(v); \tag{4.}$$

also ist $F(u)du = H^2(v)dv$. Durch Einführung dieser Werte in Gleichung (2.) § 2 ergeben sich x, y, z als Funktionen von G(v) und H(v) in der Form[1]):

$$\left\{\begin{aligned} x &= i\int[G^2(v_1) - H^2(v_1)]dv_1 - i\int[G^2(v_2) - H^2(v_2)]dv_2, \\ y &= \int[G^2(v_1) + H^2(v_1)]dv_1 + \int[G^2(v_2) + H^2(v_2)]dv_2, \\ z &= 2i\int G(v_1)H(v_1)dv_1 - 2i\int G(v_2)H(v_2)dv_2. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

§ 6.

Aufstellung der speziellen Differentialgleichungen.

Die einfachste partielle Differentialgleichung 2. Ordnung von der Form $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = [\varphi(v_1) - \varphi(v_2)]\Theta$ ist offenbar die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = 0. \tag{I.}$$

Ihr allgemeines Integral[2]) ist:

$$\Theta = A - B, \tag{Iα.}$$

wo A eine willkürliche Funktion von α, also auch von $v_1 + v_2$, B eine willkürliche Funktion von β, also auch von $v_1 - v_2$ ist. Dieser Fall (I.) tritt ein, wenn die Funktion φ sich auf eine reelle Konstante reduziert. Man hat demnach zunächst die beiden, getrennt zu behandelnden Fälle:

(I′.) $\varphi = 0$; (I″.) $\varphi = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}$ reell.

Aus der Differentialgleichung (I.) leitet man[3]) mit Hilfe eines partikulären Integrales $\Theta = A_1 - B_1$, wobei A_1 und B_1 ebenfalls nur Funktionen von α bezw. β sind, eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \frac{m(1 - m)A'_1 B'_1}{(A_1 - B_1)^2}\Theta \tag{1.}$$

[1]) cf. Darboux I, p. 454, Formel (3.).
[2]) cf. Darboux t. II, p. 142, 143.
[3]) cf. Darboux t. II, p. 142, 143.

ab, deren allgemeines Integral sich aus den partikulären Integralen A_1 und B_1 und dem allgemeinen Integral $A - B$ der Differentialgleichung (I.) in folgender Weise zusammensetzt:

$$(2.) \qquad \Theta = m(m-1)\frac{A-B}{A_1-B_1} - \frac{A'}{A'_1} - \frac{B'}{B'_1}.$$

Die Gleichung (1.) ist in ihrer Allgemeinheit für die vorliegende Aufgabe nicht zu brauchen. Vielmehr müssen Funktionen A_1, B_1 von der Art gewählt werden, daß der Quotient auf der rechten Seite als Differenz zweier Funktionen mit den Argumenten v_1 bezw. v_2 oder $\alpha + \beta$ bezw. $\alpha - \beta$ auftritt. Zur Bestimmung dieser Funktionen A_1, B_1 lege man die einfachere, Eulersche Gleichung:

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha_1 \partial \beta_1} = \frac{m(1-m)}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}\Theta$$

zugrunde, die durch Spezialisierung der Variablen aus der Gleichung (1.) gewonnen wird. Soll die Gleichung (3.) in eine harmonische Gleichung von der Form $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \alpha \partial \beta} = [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha - \beta)]\Theta$ übergeführt werden, dann muß es möglich sein[1]), α als Funktion von α_1, β als Funktion von β_1 so zu bestimmen, daß die Identität:

$$(4.) \qquad [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha - \beta)]\, d\alpha\, d\beta = \frac{m(1-m)}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} d\alpha_1\, d\beta_1$$

besteht. In diese Identität werden an Stelle von α, β neue Funktionen $A_2(\alpha_1)$ und $B_2(\beta_1)$ durch die Substitution:

$$(5.) \qquad \alpha = \int \frac{d\alpha_1}{\sqrt{A_2}}, \quad \beta = \int \frac{d\beta_1}{\sqrt{B_2}}$$

eingeführt. Sie läßt sich dann so schreiben:

$$(6.) \qquad [\varphi(\alpha + \beta) - \varphi(\alpha - \beta)] = \frac{m(1-m)}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \sqrt{A_2}\sqrt{B_2}.$$

Bringt man nun zum Ausdruck, daß:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left[\frac{m(1-m)}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}\sqrt{A_2}\sqrt{B_2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\left[\frac{m(1-m)}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}\sqrt{A_2}\sqrt{B_2}\right],$$

und berücksichtigt beim Differenzieren, daß $d\alpha = \frac{d\alpha_1}{\sqrt{A_2}}$; $d\beta = \frac{d\beta_1}{\sqrt{B_2}}$ zu setzen ist, so erhält man als Gleichung, der die Funktionen A_2 und B_2 genügen müssen, die folgende:

$$(7.) \quad 12(A_2 - B_2) - 6(\alpha_1 - \beta_1)(A'_2 + B'_2) + (\alpha_1 - \beta_1)^2(A''_2 - B''_2) = 0.$$

[1]) cf. Darboux t. II, p. 208—212.

Durch zweimalige Differentiation nach α_1 und β_1 findet man $A_2^{(IV)} - B_2^{(IV)} = 0$, demnach $A_2^{(IV)} = B_2^{(IV)} = a$, also sind A_2 und B_2 Polynome der 4. Ordnung, die einander gleich sein müssen, wenn $\alpha_1 = \beta_1$ gesetzt wird.

Man hat also den folgenden Ansatz:

$$(8.)\qquad \begin{cases} A_2 = a\alpha_1^4 + b\alpha_1^3 + c\alpha_1^2 + d\alpha_1 + e \\ B_2 = a\beta_1^4 + b\beta_1^3 + c\beta_1^2 + d\beta_1 + e, \end{cases}$$

wobei die Konstanten a, b, c, d, e willkürlich sind. Je nach den Wurzeln dieser Polynome wird man durch die Formeln (5.) verschiedene Werte von α und β bezw. durch Umkehrung verschiedene Werte für α_1 und β_1 erhalten, die durch Einsetzen in die Gleichung (3.) verschiedene Formen der harmonischen Differentialgleichung liefern werden. Andererseits können die zu gewinnenden Differentialgleichungen auch dadurch verallgemeinert werden, daß man, wenn für dieselben Formen A_2, B_2 sich verschiedene Werte für α, β nach den Gleichungen (5.) ergeben, eine beliebige lineare Verbindung der verschiedenen Formen in die Differentialgleichung einführt.

Die Gleichungen (5.), in denen A_2, B_2 durch die Gleichungen (8.) bestimmt sind, ändern sich nicht, wenn eine lineare Substitution auf die Variablen α_1, β_1 angewendet wird; infolgedessen kann man drei Wurzeln beliebig wählen und eine unbestimmt lassen. Es treten für die vorliegende Aufgabe folgende Einzelfälle auf:

1. Das Polynom 4. Grades habe eine dreifache Wurzel, die vierte Wurzel werde gleich Null gesetzt. Alsdann kann $A_2 = 4\alpha_1$, $B_2 = 4\beta_1$ gesetzt werden. Die Gleichungen (5.) liefern dann $\alpha = \alpha_1^{\frac{1}{2}}$, $\beta = \beta_1^{\frac{1}{2}}$, woraus durch Umkehrung:

$$\alpha_1 = \alpha^2,\ \beta_1 = \beta^2$$

gefolgert wird.

Wählt man nun $\Theta = \alpha^2 - \beta^2$ als partikuläres Integral der Differentialgleichung (I.), so kann mit diesem eine Differentialgleichung von der Form:

$$(II.)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{v_1^2} - \frac{m(m-1)}{v_2^2}\right]\Theta$$

aus der Gleichung (1.) durch Spezialisierung der Funktionen A_1, B_1 gewonnen werden. In derselben Weise ergibt sich das allgemeine Integral der Gleichung (II.) in der Form:

$$(II\alpha.)\qquad \Theta = \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{A-B}{v_1 v_2} - \frac{A'}{v_1+v_2} - \frac{B'}{v_1-v_2}\right].$$

2. Wenn das Polynom eine Doppelwurzel und zwei einfache Wurzeln hat, die der Einfachheit wegen gleich 0 und 1 gesetzt werden sollen, kann eine weitere harmonische Differentialgleichung abgeleitet werden. Alsdann wird:

$$A_2 = 4\alpha(1-\alpha_1); \quad B_2 = 4\beta_1(1-\beta_1).$$

Die Auflösungen der Gleichungen (5.) ergeben dann:

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\alpha_1}; \; \beta = \arcsin\sqrt{\beta_1},$$

wenn der Wurzel das positive Zeichen gegeben wird. Durch Umkehrung folgt:

$$\alpha_1 = \sin^2\alpha, \; \beta_1 = \sin^2\beta.$$

Faßt man diese Werte wieder als die speziellen partikulären Integrale A_1, B_1 auf, so erhält man aus Gleichung (1.) die harmonische Differentialgleichung:

$$\text{(9.)} \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{\sin^2 v_1} - \frac{m(m-1)}{\sin^2 v_2}\right]\Theta.$$

Hätte man in Gleichung (5.) die Wurzel mit dem negativen Zeichen gewählt, dann hätte man $\alpha = \arccos\sqrt{\alpha_1}$, $\beta = \arccos\sqrt{\beta_1}$ und damit:

$$\alpha_1 = \cos^2\alpha; \; \beta_1 = \cos^2\beta$$

erhalten, was durch Einführung in die Gleichung (1.) die harmonische Differentialgleichung:

$$\text{(10.)} \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{\cos^2 v_1} - \frac{m(m-1)}{\cos^2 v_2}\right]\Theta$$

ergibt. Durch Verbindung der Gleichungen (9.) und (10.) ergibt sich, wenn man unter n eine beliebige ganze Zahl versteht, die allgemeine harmonische Differentialgleichung:

$$\text{(III.)} \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{\sin^2 v_1} + \frac{n(n-1)}{\cos^2 v_1} - \frac{m(m-1)}{\sin^2 v_2} - \frac{n(n-1)}{\cos^2 v_2}\right]\Theta,$$

deren allgemeines Integral aus den allgemeinen Integralen der Differentialgleichungen (9.) und (10.) gefunden wird.

3. Es erübrigt noch die Untersuchung des allgemeinen Falles, wo die sämtlichen Wurzeln des Polynomes verschieden sind. Sind die drei allein in Betracht kommenden Wurzeln 0, 1, $\frac{1}{k^2}$, dann kann man setzen:

$$A_2 = 4\alpha_1(1-\alpha_1)(1-k^2\alpha_1);\ B_2 = 4\beta_1(1-\beta_1)(1-k^2\beta_1)$$

und erhält aus:

$$\alpha = \int \frac{d\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_1(1-\alpha_1)(1-k^2\alpha_1)}};\ \beta = \int \frac{d\beta_1}{2\sqrt{\beta_1(1-\beta_1)(1-k^2\beta_1)}}$$

folgende 4 Spezialfälle:

(1α.) $$\alpha_1 = sn^2\alpha;\ \beta_1 = sn^2\beta,$$

was durch Einführung in die Differentialgleichung (1.) für A_1, B_1 zu der harmonischen Differentialgleichung:

(1β.) $$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1{}^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2{}^2} = \left[\frac{m(m-1)}{sn^2 v_1} - \frac{m(m-1)}{sn^2 v_2}\right]\Theta$$

führt.

(2α.) $$\alpha_1 = sn^2(\alpha + k);\ \beta_1 = sn^2\beta.$$

Die mit diesen Werten gebildete Differentialgleichung ist:

(2β.) $$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1{}^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2{}^2} = \left[m(m-1)\frac{dn^2 v_1}{cn^2 v_1} - m(m-1)\frac{dn^2 v_2}{cn^2 v_2}\right]\Theta.$$

(3α.) $$\alpha_1 = sn^2(\alpha + ik'),\ \beta_1 = sn^2\beta$$

führt zur harmonischen Differentialgleichung:

(3β.) $$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1{}^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2{}^2} = [m(m-1)k^2 sn^2 v_1 - m(m-1)k^2 sn^2 v_2]\Theta.$$

Endlich

(4α.) $$\alpha_1 = sn^2(\alpha + k + ik');\ \beta_1 = sn^2\beta.$$

Die mit diesen Funktionen abgeleitete Differentialgleichung hat die Form:

(4β.) $$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1{}^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2{}^2} = \left[m(m-1)k^2\frac{cn^2 v_1}{dn^2 v_1} - m(m-1)k^2\frac{cn^2 v_2}{dn^2 v_2}\right]\Theta.$$

Aus den 4 Differentialgleichungen (1β.), (2β.), (3β.), (4β.) läßt sich nun die allgemeine harmonische Differentialgleichung:

(IV.) $$\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1{}^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2{}^2} = [e(v_1) - e(v_2)]\Theta$$

ableiten, in welcher:

$$e(v) = \frac{m_1(m_1-1)}{sn^2 v} + m_2(m_2-1)\frac{dn^2 v}{cn^2 v} + m_3(m_3-1)k^2\frac{cn^2 v}{dn^2 v} + m_4(m_4-1)k^2 sn$$

zu setzen ist. In diesem Ausdrucke sind m_1, m_2, m_3, m_4, ebenso

wie die Größen m und n in den Gleichungen (II.) und (III.) beliebige ganze Zahlen. Damit sind die harmonischen Gleichungen 2. Ordnung gefunden, die den speziellen Untersuchungen zugrunde gelegt werden sollen.

Die Gleichungen (II.) und (III.) können aus der Gleichung (I.) auch auf anderem Wege abgeleitet werden, unter Berücksichtigung der folgenden allgemeinen Eigenschaft der harmonischen Differentialgleichung[1]).

Sind $\eta(v_1)$, $\eta(v_2)$ zwei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (1.) in § 2, so kann man durch Moutardsche Transformation aus der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = [\varphi(v_1) - \varphi(v_2)]\,\Theta$ eine neue harmonische Differentialgleichung mit dem partikulären Integral $\eta(v_1)\,\eta(v_2)$ von der Form:

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\eta(v_1)\left(\frac{1}{\eta(v_1)}\right)'' - \eta(v_2)\left(\frac{1}{\eta(v_2)}\right)''\right]\Theta$$

ableiten, deren allgemeines Integral Ω sich aus dem allgemeinen Integral ω der ursprünglichen Differentialgleichung und den Funktionen $\eta(v_1)$, $\eta(v_2)$ zusammensetzt.

Die Differentialgleichungen (I.) bis (IV.) lassen nun erkennen, daß die nach Gleichung (1.) des § 3 zu bildenden Differentialgleichungen sich nur im Argumente v unterscheiden, so daß die gewählte Bezeichnung als zulässig erkannt ist.

§ 7.

Allgemeine Sätze für die Diskussion der Flächen.

Um die Flächen, welche durch die aus den Differentialgleichungen (I.) bis (IV.) zu gewinnenden Funktionen bestimmt sind, mit bereits bekannten speziellen Minimalflächen zu identifizieren, genügt es, die Weierstraßsche Funktion F(u) aufzustellen, diese dann in die Gleichungen (2.) bezw. (1.) des § 2 einzuführen, um so die Gleichungen für die Koordinaten der Flächenpunkte zu erhalten. Nicht in allen Fällen lassen sich die Ausdrücke für die Koordinaten in einfacher Form darstellen; da gelingt es nun, mit Hilfe der Abbildung des Flächenstückes M charakteristische Merkmale für die zu untersuchende Fläche aufzufinden. Man benützt dabei zwei konforme Abbildungen des Minimalflächenstückes M. Durch Abbildung

---

[1]) cf. Darboux II, p. 206.

auf die Kugel durch Parallelismus der Normalen entsteht das sphärische, konforme Bild S des Flächenstückes M so zwar, daß dem Punkte (u_1, u_2) auf M der Punkt (ξ, η, ζ) auf S entspricht, dessen Koordinaten bestimmt sind durch[1]):

$$(1.)\qquad \xi = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2};\quad \eta = i\,\frac{u_2 - u_1}{1 + u_1 u_2};\quad \zeta = \frac{1 - u_1 u_2}{1 + u_1 u_2}.$$

Dagegen vermittelt die Formel:

$$(2.)\qquad v = \int \sqrt{F(u)}\,du$$

eine ebenfalls konforme Abbildung des Flächenstückes M auf die V-Ebene. Das so erhaltene ebene Bild E und das sphärische Bild S bilde man noch auf die positive Halbebene T dadurch ab, daß man für u und v gewisse Funktionen von t einführt und nur solche Werte von t in Betracht zieht, deren imaginärer Teil positiv ist. Aus der Natur der diese Abbildung auf die Halbebene T vermittelnden Funktionen lassen sich Schlüsse auf die Umgrenzung des ebenen und sphärischen Bildes, von der Umgrenzung dieser beiden Bilder wiederum Schlüsse auf die Begrenzung des Minimalflächenstückes M ziehen.

Im einzelnen läßt sich das so verfolgen, indem nur die Sätze, die bei den speziellen Untersuchungen in Betracht kommen, angefügt werden sollen.[2])

Auf jeder durch die aus den Gleichungen (I.) bis (IV.) des § 7 abzuleitenden Funktionen F(u) definierten Fläche wird durch die über t gemachte Festsetzung ein einfach zusammenhängendes Flächenstück festgelegt, dessen Umgrenzung zum sphärischen Bilde größte Kreise der Kugel hat, die in bestimmter Ordnung aufeinander folgen und sich unter bestimmten Winkeln schneiden. Nun erscheint nach Gleichung (3.) des § 4 W_1 und damit u als Quotient der beiden partikulären Integrale der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\left(\frac{1}{\sqrt{W'_1}}\right)'' = [\varphi + h]\,\frac{1}{\sqrt{W'_1}}.$$

Diese kann auch in die Form:

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dv^2}\left(\log\frac{dW_1}{dv}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dv}\log\frac{dW_1}{dv}\right)^2\right] = (\varphi + h) \text{ oder } -\frac{1}{2}\left\{W_1, v\right\} = (\varphi +$$

gebracht werden, und vermittelt infolgedessen die Abbildung des von Kreisbogen begrenzten sphärischen Flächenstückes auf die

[1]) cf. Formel (7.) § 2.

[2]) cf. Darboux t. I, Chap. IV.

positive Halbebene V, wenn $\varphi + h$ eine einwertige Funktion von v ist, die für reelle Werte von v reell ist. Ein Blick auf die Gleichungen (III.), (IV.) des § 7 zeigt, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist. Infolgedessen muß in die Differentialgleichung $\left(\frac{1}{\sqrt{W'}}\right)'' = [\varphi + h]\frac{1}{\sqrt{W'}}$ für v eine Funktion der Variablen t eingeführt werden, so daß $[\varphi + h]$ sich als rationale Funktion von t darstellen läßt. Nimmt die Differentialgleichung dann die allgemeinere Form:

$$(4.) \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p\frac{d\vartheta}{dt} + q = 0,$$

an, in welcher für die vorliegenden Untersuchungen p die allgemeine Form:

$$(5.) \qquad p = \Sigma\frac{g}{t-\gamma}, \quad \text{g beliebige reelle Zahl,}$$

hat, so wird die die Abbildung des sphärischen Flächenstückes S vermittelnde Funktion durch die Relation:

$$(6.) \qquad \left\{u, \ t\right\} = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dt}$$

gewonnen. Diese Differentialgleichung (6.) stellt eben die Gleichung dar, der der Quotient zweier partikulärer Integrale der Differentialgleichung (4.) genügt. Sie nimmt bei den zu behandelnden Fällen den allgemeinen Typus:

$$(7.) \qquad \left\{u, \ t\right\} = \Sigma\frac{1}{2}\frac{1-\alpha^2}{(t-a)^2} + \Sigma\frac{h_i}{t-a}$$

an; dabei sind a die Werte von t, welche den Ecken der Begrenzung des sphärischen Flächenstückes S bei der Abbildung auf die Halbebene T entsprechen, $\alpha\pi$ ist der Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Seiten auf S bilden. Ist der dem Werte $t = \infty$ entsprechende Punkt eine Ecke, in welcher die zwei zusammenstoßenden Seiten den Winkel $\beta\pi$ bilden, so müssen die Gleichungen:

$$(8.) \qquad \Sigma h_i = 0, \quad \Sigma\left(a h_i + \frac{1-\alpha^2}{2}\right) = \frac{1-\beta^2}{2}$$

bestehen.

Wählt man die Funktion von t in der oben angegebenen Weise, so läßt sich der Zusammenhang zwischen v und t durch eine Gleichung vom Typus:

$$(9.)\qquad v = H\int (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}\ldots(t-n)^{\nu-1}$$

darstellen. Durch diese Formel wird aber die Abbildung eines von geraden Linien begrenzten Polygones in der V-Ebene auf die positive Halbebene T vermittelt, in der Weise, daß den Ecken des Polygones die Werte $t = a, b, \ldots n$ entsprechen, während $\alpha\pi$, $\beta\pi$, ..., $\nu\pi$ die Winkel zweier aufeinanderfolgender entsprechender Seiten darstellen.

Die Formeln (7.) und (9.), welche dazu dienen, das sphärische Polygon S und das ebene Polygon E in die positive Halbebene T abzubilden, gestatten einen Schluß auf die Umgrenzung der beiden Bilder und damit auf die das Flächenstück M begrenzenden Kurven. Es wird sich zeigen, daß in den verschiedenen Fällen die partikulären Integrale so gewählt werden können, daß das zugehörige Minimalflächenstück M von geraden Linien begrenzt wird.

Die Größe der Winkel und Seiten des räumlichen Polygons wird von den in den Differentialgleichungen auftretenden Konstanten abhängen. Aus dem von einem räumlichen Polygon begrenzten Flächenstück M kann die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung gewonnen werden dadurch, daß man an den einzelnen Geraden, die ja Symmetrielinien der Minimalflächen sind, Flächenstücke ansetzt, die symmetrisch sind in bezug auf die entsprechenden Geraden.

Die mit Hilfe des allgemeinen Integrales der Differentialgleichungen zu bildenden Flächen sind zu den soeben charakterisierten Flächen assoziiert, die Begrenzungskurven lassen sich sofort angeben, wenn man die beiden Sätze, die den Zusammenhang zwischen der ursprünglichen Fläche und ihren assoziierten Flächen vermitteln:

„Entsprechende Linienelemente bilden einen konstanten Winkel“

und

„die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten sind zueinander parallel“

auf die begrenzenden geraden Linien der ursprünglichen Fläche anwendet. Es ist klar, daß den geraden Linien Schraubenlinien auf der allgemeinen Fläche entsprechen. Wählt man speziell den Winkel $\frac{\pi}{2}$, dann wird aus der geraden Linie eine in der Ebene senkrecht zur Geraden gelegene Kurve, längs welcher die Ebene die Fläche unter rechtem Winkel schneidet.

Die Bestimmung der geraden Linien auf den Flächen kann in einfachen Fällen in folgender Weise geschehen.

Die geraden Linien auf den Flächen müssen den beiden Systemen der Asymptotenlinien angehören, deren Differentialgleichung $dv_1{}^2 - dv_2{}^2 = 0$ ist. Wie aus der endlichen Gleichung der beiden Kurvenscharen $+ v_1 \; \varepsilon v_2 = C (\varepsilon = \pm 1)$ sich ergibt, handelt es sich um Aufstellung einer Gleichung für C, wenn als spezielle Kurven gerade Linien sich ergeben sollen. Bezeichnen α, β, γ die Richtungskosinusse in einem Punkte der Asymptotenlinien, dann müssen für die Punkte der geraden Linien diese Ausdrücke konstant sein. Aus:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}; \; \beta = \frac{dy}{ds}; \; \gamma = \frac{dz}{ds}$$

ergibt sich, da das Linienelement ds der Fläche für $dv_2 = \varepsilon dv_1$ die Form:

$$ds = 2\sqrt{\varepsilon}\,[G(v_1)\,G(v_2) + H(v_1)\,H(v_2)]\,dv_1$$

annimmt, wenn man auf die Darstellungsform der Fläche in § 5 zurückgeht — für v_2 wäre zu setzen $\varepsilon v_1 + C$ —, die folgende Darstellung:

$$\alpha = \frac{Z_1}{N}; \; \beta = \frac{Z_2}{N}; \; \gamma = \frac{Z_3}{N},$$

wobei:

$$Z_1 = i\{[G^2(v_1) - H^2(v_1)] - \varepsilon[G^2(v_2) - H^2(v_2)]\},$$
$$Z_2 = \{[G^2(v_1) + H^2(v_1)] + \varepsilon[G^2(v_2) + H^2(v_2)]\},$$
$$Z_3 = 2i\{G(v_1)\,H(v_1) - \varepsilon G(v_2) H(v_2)\},$$
$$N = 2\sqrt{\varepsilon}\{G(v_1)\,G(v_2) + H(v_1) H(v_2)\}$$

gesetzt ist. Soll längs der Geraden $\alpha = \mathfrak{a}$, $\beta = \mathfrak{b}$, $\gamma = \mathfrak{c}$ sein, wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ konstante Größen sind, die für die einzelnen Geraden verschiedene Werte annehmen, so muß zunächst $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = 1$ sein. Aus:

$$Z_1 = \mathfrak{a}N, \; Z_2 = \mathfrak{b}N, \; Z_3 = \mathfrak{c}N$$

folgt durch Derivation:

$$Z'_1 = \mathfrak{a}N', \; Z'_2 = \mathfrak{b}N', \; Z'_3 = \mathfrak{c}N'.$$

Das Eliminationsresultat der Größen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aus diesen Gleichungen ist:

$$Z'^2_1 + Z'^2_2 + Z'^2_3 - N'^2 = 0.$$

Dieser Ausdruck wird zur Bestimmung der Größe C eine Gleichung liefern, die unabhängig von den speziellen Werten der Größe v_1 ist. Daher wird man die Größe C dadurch bestimmen können, daß man in der Gleichung der Größe v_1 einen Wert beilegt, der die Gleichung nicht identisch für jedes C zu Null macht.

Kapitel II.

Die speziellen Minimalflächen.

§ 1.

Fall (I.), wo $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = 0$ ist.

Wie zu Anfang des § 7 angegeben, sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

(I.′) Es sei $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 0$.

In diesem Falle ergibt sich zur Bestimmung der Minimalflächen aus dem Ansatze (2.) in § 3, da natürlich auch $h = 0$ gesetzt werden muß, die Differentialgleichung:

(1.) $$\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = 0,$$

deren allgemeine Lösung durch:

(1′.) $$\frac{1}{\sqrt{W'(v)}} = av + b$$

gegeben ist. Als die beiden, linearunabhängigen partikulären Integrale treten 1, v auf. Legt man das Integral 1 zugrunde, dann sind die zugehörigen allgemeinen Weierstraßschen Funktionen [cf. (8.) § 4]:

(2.) $$F(u_1) = se^{i\sigma};\ F(u_2) = se^{-i\sigma}.$$

Durch diese Funktionen sind die zur Enneperschen Fläche gehörigen assoziierten Flächen bestimmt. Diese, also auch die adjungierte Fläche, stimmen aber der Gestalt nach mit der ursprünglichen Fläche überein. Zur Aufstellung der bekannten

Gleichungen der Enneperschen Fläche genügt es, die Konstante $s = 3$ zu setzen. Alsdann ergeben die Gleichungen (2.) in § 2 für die Koordinaten der Flächenpunkte folgende Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = i(3u_1 - u_1^3 - 3u_2 + u_2^3), \\ y = -(3u_1 + u_1^3 + 3u_2 + u_2^3), \\ z = i(3u_1^2 - 3u_2^2), \end{cases}$$

in denen die Integrationskonstanten weggelassen wurden. Führt man die Parameter (α, β) der Asymptotenlinien ein an Stelle der Parameter (u_1, u_2) der Minimalkurven, indem man setzt:

$$u_1 = \alpha + i\beta;\ u_2 = \alpha - i\beta,$$

— u, v unterscheiden sich nur durch den Faktor $\sqrt{3}$ —, so ergeben die Gleichungen (3) die Ausdrücke:

$$(4.)\quad \begin{cases} x = 3\beta - 3\alpha^2\beta + \beta^3, \\ y = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ z = \alpha\beta, \end{cases}$$

wobei der Faktor -2 in den drei Ausdrücken ausgeschieden wurde.

Für die Ennepersche Fläche können die Funktionen x_1, y_1, z_1 ohne Integralzeichen dargestellt werden, wenn man nur ω in der Form $A'' + B''$ voraussetzt. Aus den Formeln:

$$dx_1 = (2\alpha\omega_\alpha - 2\omega)d\alpha - 2\alpha\omega_\beta d\beta,$$

$$dy_1 = -2i\beta\omega_\alpha da + 2i(\beta\omega_\beta - \omega)d\beta,$$

$$dz_1 = [(1 - \alpha^2 - \beta^2)\omega_\alpha + 2\alpha\omega]d\alpha - [(1 - \alpha^2 - \beta^2)\omega_\beta + 2\beta\omega]d\beta,$$

welche sich ergeben, wenn man Θ_1, Θ_2, Θ_3 nach den Gleichungen (9.) in § 2 berechnet und in die Gleichungen (10.) des § 1 einsetzt, werden durch Integration die Gleichungen abgeleitet:

$$(5.)\quad \begin{cases} x_1 = 2[A''\alpha - 2A' - \alpha B''], \\ y_1 = 2i[B''\beta - 2B' - \beta A''], \\ z_1 = (1-\alpha^2-\beta^2)(A''-B'')+4\alpha A'+4\beta B'-4A+4B. \end{cases}$$

Durch Kombination der Gleichungen (5.) mit den Gleichungen (4.) erhält man die Koordinaten der Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der durch infinitesimale Deformation der Enneperschen Fläche entstehenden Fläche, wenn man $\bar{x} = x + \varepsilon x_1$, $\bar{y} = y + \varepsilon y_1$, $\bar{z} = z + \varepsilon z_1$ setzt. Diese können somit ebenfalls ohne Integralzeichen dargestellt werden.

(I''.) Es sei $\varphi(v_1) = \mathfrak{r}$, $\varphi(v_2) = \mathfrak{r}$.

In diesem Falle wird die Funktion W(v) aus der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = \mathfrak{r}\,\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}, \tag{6.}$$

gewonnen, indem angenommen wird, daß die noch einzuführende reelle Konstante h bereits in dem reellen $\mathfrak{r}$ enthalten ist. Das allgemeine Integral der vorliegenden homogenen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$\frac{1}{\sqrt{W'(v)}} = a e^{\mathfrak{r} v} + b e^{-\mathfrak{r} v} \tag{6'.}$$

In diesem Ausdruck soll zunächst $\mathfrak{r} = 1$ gesetzt werden, dann sind e^v und e^{-v} die beiden partikulären Integrale. Die zugehörige Konstante c hat den Wert 2. Es ist somit:

$$u = \frac{1}{2} e^{2v}; \quad F(u) = e^{-4v},$$

oder, wenn man e^{-4v} durch u ausdrückt:

$$F(u) = \frac{1}{4u^2}. \tag{7.}$$

Demnach findet man die folgenden allgemeinen Ausdrücke für die Weierstraßschen Funktionen:

$$F_1(u_1) = \frac{s e^{i\sigma}}{u_1^{\,2}}; \quad F_2(u_2) = \frac{s e^{-i\sigma}}{u_2^{\,2}}, \tag{8.}$$

die mit den bei Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. I, p. 307 (24.), § 333, sich findenden Funktionen zu identifizieren sind.

Die geometrische Bedeutung der in der allgemeinen Formel (6'.) auftretenden reellen Konstanten $\mathfrak{r}$ kann mit Hilfe der beiden in § 8 angegebenen konformen ebenen und sphärischen Abbildung erkannt werden; gleichzeitig erhält man dadurch Aufschluß über den gemeinsamen Charakter aller zugehörigen Flächen.

Es lassen sich u und v durch ein und dieselbe Hilfsvariable t ausdrücken, wenn $e^{\mathfrak{r} v}$ und $e^{-\mathfrak{r} v}$ als partikuläre Integrale gewählt

werden. Zunächst findet man in derselben Weise wie im speziellen Falle $\mathfrak{r}=1$ den Zusammenhang zwischen u und v. Es ist:

$$u = \frac{1}{2\mathfrak{r}} e^{2\mathfrak{r}v}. \tag{10.}$$

Setzt man $\frac{e^{2v}}{\sqrt[\mathfrak{r}]{2\mathfrak{r}}} = t$, dann folgt $v = \frac{1}{2}[\log \sqrt[\mathfrak{r}]{2\mathfrak{r}} + \log t]$, woraus durch Derivation:

$$dv = \frac{dt}{2t} \tag{11.}$$

gefunden wird. Daraus läßt sich nun auf Grund der Formel (9.) in § 8 schließen, daß das ebene Bild E des zu untersuchenden Flächenstückes M von zwei zur X-Achse parallelen geraden Linien begrenzt wird. Also muß die Begrenzung von M aus 2 Asymptotenlinien bestehen.

Andererseits ist aber:

$$u = t^{\mathfrak{r}}. \tag{12.}$$

Durch diese Formel wird aber die Abbildung eines von größten Kreisen begrenzten Kugelzweieckes mit dem Winkel $\mathfrak{r}\pi$ auf die positive Halbebene T vermittelt. Aus dem Umstande, daß die als Begrenzungskurven auftretenden Asymptotenlinien größte Kreise zu sphärischen Bildern haben, läßt sich schließen, daß die zwei Asymptotenlinien gerade Linien sind, die den Winkel $\mathfrak{r}\pi$ miteinander bilden. Diese beiden geraden Linien sind parallel zur X-Y-Ebene.

Als Funktionen von t lassen sich die Ausdrücke für die Koordinaten der Flächenpunkte leicht bestimmen [1]).

Man findet:

$$x = \frac{i}{2}[t_1^{\mathfrak{r}} + t_1^{-\mathfrak{r}} - (t_2^{\mathfrak{r}} + t_2^{-\mathfrak{r}})],$$

$$y = \frac{1}{2}[t_1^{\mathfrak{r}} - t_1^{-\mathfrak{r}} + t_2^{\mathfrak{r}} - t_2^{-\mathfrak{r}}],$$

$$z = -i\mathfrak{r}[\log(t_1) - \log(t_2)],$$

also die Gleichungen für die Minimalschraubenregelfläche.

Setzt man die Werte in (8.) in die Gleichungen (1.) des § 2 ein, so ergeben sich die Gleichungen für die Koordinaten der Punkte der Minimalflächen, die zu den Flächen, für welche:

---

[1]) cf. Darboux I, p. 436, Formeln (6).

$$F(u_1) = \frac{1}{u_1^2};\ F(u_2) = \frac{1}{u_2^2}$$

zu nehmen ist, assoziiert sind, in der folgenden Form:

$$(9.)\quad \begin{cases} x_0 = \frac{e^{i\sigma}}{4}\left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right) + \frac{e^{-i\sigma}}{4}\left(u_2 + \frac{1}{u_2}\right), \\ y_0 = \frac{i e^{i\sigma}}{4}\left(\frac{1}{u_1} - u_1\right) - i\frac{e^{-i\sigma}}{4}\left(\frac{1}{u_2} - u_2\right), \\ z_0 = -\frac{e^{i\sigma}}{2}\ln(u_1) - \frac{e^{-i\sigma}}{2}\ln(u_2). \end{cases}$$

Durch die Substitution $u_1 = e^{-\mu + i\nu}$, $u_2 = e^{-\mu - i\nu}$ lassen sich daraus die Gleichungen ableiten:

$$(9'.)\quad \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}[e^{-\mu}\cos(\nu + \sigma) + e^{\mu}\cos(\nu - \sigma)], \\ y_0 = \frac{1}{2}[e^{-\mu}\sin(\nu + \sigma) + e^{\mu}\sin(\nu - \sigma)], \\ z_0 = \mu\cos\sigma + \nu\sin\sigma. \end{cases}$$

Für $\sigma = 0$ ergeben sich die Ausdrücke, die zur Bestimmung des Katenoids dienen, während für $\sigma = \frac{\pi}{2}$ die Gleichungen für die Punkte der Minimalschraubenregelfläche abgeleitet werden.

§ 2.

Fall (II.), wo $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{v_1^2} - \frac{m(m-1)}{v_2^2}\right]\Theta$ ist.

Dieser Fall (II.) kann aus dem Falle (I.), wo $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = 0$ ist, durch Moutardsche Transformation, wie zum Schlusse des § 6 Kap. I angedeutet wurde, abgeleitet werden, wenn man speziell $\eta(v_1) = v_1$, $\eta(v_2) = v_2$ wählt. Die Gleichung (10.) des § 7 Kap. I geht für diese speziellen Werte über in die harmonische Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{1.2}{v_1^2} - \frac{1.2}{v_2^2}\right]\Theta.$$

Nun ist $v_1^2 v_2^2$ ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung.

Führt man jetzt $\eta(v_1) = v_1^2$; $\eta(v_2) = v_2^2$ in derselben Weise in die eben genannte allgemeine Differentialgleichung ein, so erhält man gleichfalls eine harmonische Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{2.3}{v_1^2} - \frac{2.3}{v_2^2}\right] \Theta,$$

von welcher $v_1^3 v_2^3$ als partikuläres Integral bekannt ist. Es ergibt sich, daß man durch Fortsetzung dieses Verfahrens zu der allgemeinen Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{m(m-1)}{v_1^2} - \frac{m(m-1)}{v_2^2}\right] \Theta$$

gelangt, in welcher m seiner Natur nach eine wesentlich positive ganze Zahl ist. Da sich aber Gleichung (1.) nicht ändert, wenn man m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) durch $1 - \overline{m}$ ($\overline{m} = 0, -1, -2, \ldots$) ersetzt, so kann in Gleichung (1.) m jede beliebige positive oder negative ganze Zahl sein.

Die zur Bestimmung der Flächen dienenden Funktionen werden in der bekannten Weise aus der Differentialgleichung:

$$(2.) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = \left[\frac{m(m-1)}{v^2} - h\right] \frac{1}{\sqrt{W'(v)}}$$

gewonnen. Diese Gleichung wird durch die Substitution:

$$(3.) \qquad \frac{1}{\sqrt{W'(v)}} = v^{\frac{1}{2}} \psi$$

in eine Besselsche Differentialgleichung[1]) für ψ übergeführt. Man erhält:

$$(4.) \qquad \frac{d^2\psi}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{d\psi}{dv} + h\psi - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\psi}{v^2} = 0.$$

Da $m - \frac{1}{2} = \nu$ keine ganze Zahl ist, so wird diese Gleichung durch Besselfunktionen integriert. Aus dem allgemeinen Integral:

$$(5.) \qquad \psi = a J_\nu(\sqrt{h}\, v) + b J_{-\nu}(\sqrt{h}\, v)$$

gewinnt man zur Bestimmung der Flächen die beiden partikulären Integrale für die Differentialgleichung (2.):

$$(6.) \qquad \frac{1}{\sqrt{W'_1(v)}} = v^{\frac{1}{2}} J_\nu(v), \quad \frac{1}{\sqrt{W'_2(v)}} = v^{\frac{1}{2}} J_{-\nu}(v),$$

wenn $h = 1$ gesetzt wird.

---

[1]) cf. Forsyth, Lehrb. der Differentialgleichungen, p. 201.

Ausnahmefall für $h = 0$.

Der allgemeine Fall erstreckt sich auf jedes beliebige h. Nur $h = 0$ ist bei den bisherigen Untersuchungen ausgeschlossen. Dieser Fall gestattet jedoch eine direkte Behandlung. Führt man nämlich in die aus (2.) für $h = 0$ sich ergebende Gleichung:

$$(6.) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = \frac{m \,.\, m-1}{v^2} \; \frac{1}{\sqrt{W'(v)}}$$

eine neue unabhängige Variable ξ ein, welche mit v durch die Relation:

$$v = e^{\xi}$$

verknüpft ist, dann geht diese Gleichung über in:

$$(7.) \quad \frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right) - m\,(m-1)\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right) = 0,$$

also in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeines Integral durch $a\,e^{m\xi} + b\,e^{(1-m)\xi}$ gegeben ist. Demnach ist

$$(8.) \quad \frac{1}{\sqrt{W'(v)}} = a\,v^m + b\,v^{1-m}$$

das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung. Wählt man v^m, v^{1-m} als die beiden partikulären Lösungen, so wird die Konstante $c = 2m - 1$. Also ist:

$$(9.) \quad u = \frac{1}{2m-1}\, v_1^{\,2m-1}$$

nach Gleichung (3.) des § 4, wenn $\frac{1}{\sqrt{W'_2(v)}} = v^m$, $\frac{1}{\sqrt{W'_1(v)}} = v^{1-m}$ gesetzt wird. Die Funktion F (u) läßt sich zunächst als Funktion von v ermitteln aus der Relation $F(u) = \frac{1}{W'^{\,2}_1(v)}$. Sie ergibt hier: $F(u) = v^{(1-m)}$. Durch Verbindung mit Gleichung (9.) wird gefunden:

$$(10.) \quad F(u) = (2m-1)\, u^{\frac{4(1-m)}{2m-1}}$$

Demnach erhält man folgendes Resultat:

Die Flächen, für welche $F(u_1) = u_1^g$ und $F(u_2) = u_2^g$ ist, wobei zur Abkürzung $g = \frac{4(1-m)}{2m-1}$ gesetzt wird, gestatten nebst ihren assoziierten Flächen die allgemeine Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation. Diese Flächen gehören zur Gruppe derjenigen Minimalflächen, welche sich auf Rotationsflächen abwickeln lassen. Das ergibt sich sofort, wenn man durch die Substitution:

$$u_1 = \varrho\, e^{i\varkappa}, \quad u_2 = \varrho\, e^{-i\varkappa}$$

auf den Flächen das Kurvensystem $(\varrho, \varkappa)$ einführt. Das Linienelement ds der Flächen nimmt sodann die Form:

$$(11.) \qquad ds^2 = (1+\varrho^2)\,\varrho^{2g}\,[d\varrho^2 + \varrho^2\, d\varkappa^2]$$

an, woraus gefolgert wird, daß bei der Abwicklung den Kurven $\varrho = \text{const.}$ die Parallelkreise, den Kurven $\varkappa = \text{const.}$ die Meridiane der Rotationsflächen entsprechen.

Um die Ausdrücke für die Koordinaten der Flächenpunkte in geschlossener Form zu erhalten, benütze man die Gleichungen (5.) des § 5 und bestimme zu dem Ende die Funktionen $G(v)$ und $H(v)$ nach Gleichung (2.) des § 5. Es ist zu setzen:

$$G(v) = \frac{v^m}{\sqrt{2m-1}}; \quad H(v) = \frac{v^{1-m}}{\sqrt{2m-1}}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung $2m-1$ mit δ, so erhält man die Darstellung:

$$(12.) \quad \begin{cases} x = \frac{i}{\delta}\left\{\int (v_1^{\delta} - v_1^{-\delta})\, v_1\, dv_1 - \int (v_2^{\delta} - v_2^{-\delta})\, v_2\, dv_2\right\}, \\ y = \frac{1}{\delta}\left\{\int (v_1^{\delta} + v_2^{-\delta})\, v_1\, dv_1 + \int (v_2^{\delta} + v_2^{-\delta})\, v_2\, dv_2\right\}, \\ z = \frac{2i}{\delta}\left\{\int v_1\, dv_1 - \int v_2\, dv_2\right\}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind in den von H. A. Schwarz, Ges. Abh. Bd. I. S. 14 angegebenen als spezieller Fall enthalten. Aus den Gleichungen (12.) ergeben sich durch Integration die Formeln:

$$(12'.) \quad \begin{cases} x = \frac{i}{\delta}\left\{\frac{1}{\delta+2}(v_1^{\delta+2} - v_2^{\delta+2}) + \frac{1}{\delta}(v_1^{\delta} - v_2^{-\delta})\right\}, \\ y = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{1}{\delta+2}(v_1^{\delta+2} + v_2^{\delta+2}) + \frac{1}{\delta}(v_1^{\delta} + v_2^{-\delta})\right\}, \\ z = \frac{i}{\delta}\left\{v_1^2 - v_2^2\right\}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der geraden Linien auf der Fläche benütze man die Gleichung $Z'^2_1 + Z'^2_2 + Z'^2_3 - N'^2 = 0$ des § 8 und setze in dieser Gleichung: $v_1 = \varrho_1 e^{\varkappa_1 i}$, $v_2 = \varrho_1 e^{-\varkappa_1 i}$, dann erhält man:

$$(13.) \quad \frac{1}{\delta^2}\left[(\delta+1)\varrho_1^{\delta} + (1-\delta)\varrho_1^{-\delta}\right]^2 \left[e^{\varkappa_1 i} + e^{-\varkappa_1 i} \mp 2\right] = 0,$$

wobei das positive Zeichen für das eine System, das negative für das andere System von Asymptotenlinien gilt. Aus $e^{\varkappa_1 i} + e^{-\varkappa_1 i} \mp 2 = 0$ ergeben sich die beiden Fälle: $e^{\varkappa_1 i} = \pm 1$. Beachtet man, daß $\varrho(e^{\varkappa_1 i} \mp e^{-\varkappa_1 i}) = C$ zu setzen ist, so ergibt sich in beiden Fällen für die zu bestimmende Größe C der Wert Null, d. h.: die den beiden Systemen der Asymptotenlinien $v_1 \mp v_2 = \text{const.}$ angehörenden 2 geraden Linien auf der Fläche werden für den Nullwert der Konstanten erhalten. Die Gleichungen dieser 2 geraden Linien ergeben sich aus den Gleichungen (12′.), wenn $v_1 \mp v_2 = 0$ gesetzt wird. Sie lauten:

$$(14.) \quad x = 0, \qquad y = \frac{2}{\delta}\left[\frac{v_1^{\delta+2}}{\delta+2} + \frac{v_1^{-\delta}}{\delta}\right], \quad z = 0,$$

$$(15.) \quad x = -\frac{2}{\delta}\left[\frac{v_1^{\delta+2}}{\delta+2} + \frac{v_1^{-\delta}}{\delta}\right], \quad y = 0, \qquad z = 0,$$

wobei in beiden Fällen v_1 nur reelle Werte annehmen darf. Diese Gleichungen bestimmen aber die X- und Y-Achse. Die beiden Geraden sind, da ihre Bestimmung unabhängig ist von der in der Differentialgleichung (6.) auftretenden Konstanten m, allen Flächen gemeinsam. Die beiden Ebenen durch die Z-Achse, welche den Winkel zwischen X- und Y-Achse halbieren, sind Symmetrieebenen der Flächen. Die in diesen Symmetrieebenen gelegenen Kurven hängen von der Größe m ab.

§ 3.

Fall (III.), wo $\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \dfrac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \left[\dfrac{m(m-1)}{\sin^2 v_1} + \dfrac{n(n-1)}{\cos^2 v_1} - \dfrac{m(m-1)}{\sin^2 v_2} - \dfrac{n(n-1)}{\cos^2 v_2}\right.$

Der Fall (III.) kann in derselben Weise, wie Fall (II.) aus Fall (I.′), aus Fall (I.″) hergeleitet werden. Für $r = -1$ ist sin v ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (6.) des § 1 in Kap. II. Durch Moutardsche Transformation wird aus $\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \dfrac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = 0$, wenn

$\eta(v_1) = \sin v_1$; $\eta(v_2) = \sin v_2$ in Gleichung (10.) des § 7 gesetzt wird, die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v_2^2} = \left[\frac{1.2}{\sin^2 v_1} - \frac{1.2}{\sin^2 v_2}\right] \Theta$ abgeleitet, welche die partikulären Integrale $\sin^2 v_1 \sin^2 v_2$ und $\sin^2 v_1 \cos v_1 \sin^2 v_2 \cos v_2$ zuläßt. Setzt man $\eta(v_1) = \sin^2 v_1 \cos v_1$; $\eta(v_2) = \sin^2 v_2 \cos v_2$, so erhält man eine Differentialgleichung, welche als Koeffizienten von Θ den Ausdruck:

$$\left[\frac{2.3}{\sin^2 v_1} + \frac{1.2}{\cos^2 v_1} - \frac{2.3}{\sin^2 v_2} - \frac{1.2}{\cos^2 v_2}\right]$$

hat. Es ist sofort ersichtlich, wie durch Fortsetzung des angedeuteten Verfahrens die oben angegebene partielle Differentialgleichung erhalten wird, in welcher m und n zunächst beliebige positive ganze Zahlen vorstellen. Aus demselben Grunde wie bei Fall (II.) können dann für m und n beliebige positive und negative ganze Zahlen gesetzt werden.

Nun handelt es sich um die Bestimmung der Funktion W. Zu diesem Zwecke setze man:

$$(1.) \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = \left[\frac{m(m-1)}{\sin^2 v} + \frac{n(n-1)}{\cos^2 v} + h\right] \frac{1}{\sqrt{W'(v)}}$$

und wende auf diese Gleichung die Substitutionen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} t = \sin^2 v, \\ \dfrac{1}{\sqrt{W'(v)}} = \psi(t) \, . \, t^{\frac{m}{2}} (1-t)^{\frac{n}{2}}, \end{cases}$$

an, dann erhält man die Differentialgleichung für ψ:

$$\ldots^{\frac{m}{2}+1}(1-t)^{\frac{n}{2}+1}\left[\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right) - (m+n+1)\,t}{t(1-t)} \frac{d\psi}{dt} - \frac{(m+n)^2 + h}{4\,t(1-t)} \psi\right] = 0$$

In der eckigen Klammer steht eine Gaußsche Differentialform, für welche:

$$\gamma = m + \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{m+n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-h}, \quad \beta = \frac{m+n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-h}$$

ist. Da t seinem Wesen nach zwischen 0 und + 1 liegt, so lautet das allgemeine Integral dieser Gaußschen Differentialgleichung, ausgedrückt durch die hypergeometrische Reihe:

$$a\,F(\alpha, \beta, \gamma, t) + b\,t^{1-\gamma}\,F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, t).$$

Demnach sind die beiden partikulären Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung (1.):

$$
(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{W'_1}} = t^{\frac{m}{2}+1}(1-t)^{\frac{n}{2}+1} F(\alpha,\beta,\gamma,t), \\ \dfrac{1}{\sqrt{W'_2}} = t^{\frac{m}{2}+2-\gamma}(1-t)^{\frac{n}{2}+1} F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,t). \end{cases}
$$

Es erscheint also u als Quotient von 2 hypergeometrischen Reihen und vermittelt infolgedessen die Abbildung eines von Kreisbogen begrenzten sphärischen Dreieckes auf die positive Halbebene T, wenn:

$$
C u = \frac{t^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,t)}{F(\alpha,\beta,\gamma,t)}
$$

gesetzt wird, wobei C eine von der Natur der partikulären Integrale der Differentialgleichung für ψ abhängige Konstante ist. Um die Abbildung in ihren Einzelheiten zu studieren, gehe man von der Differentialgleichung für ψ aus. Der Koeffizient von $\dfrac{d\psi}{dt}$ läßt sich in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen in § 8 schreiben:

$$
(6.)\qquad p = \frac{m+\frac{1}{2}}{t} + \frac{n+\frac{1}{2}}{t-1},
$$

während der Koeffizient von ψ lautet:

$$
(7.)\qquad q = \frac{-\frac{(m+n)^2+h}{4}}{t} + \frac{\frac{(m+n)^2+h}{4}}{t-1}.
$$

Setzt man:

$$
(8.)\qquad h_1 = -\frac{(m+n)^2+h}{4};\quad h_2 = \frac{(m+n)^2+h}{4},
$$

so erhält man die Relation:

$$
(8'.)\qquad h_1 + h_2 = 0.
$$

Die Differentialgleichung, der der Quotient der partikulären Integrale der Differentialgleichung für ψ genügt, wird aus Gleichung (6.) des § 8 abgeleitet, wenn man für p und q die speziellen Werte in (6.) und (7.) einsetzt. Man findet:

$$
(9.)\quad \{u,t\} = \frac{1-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}{2t^2} + \frac{1-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{2(t-1)^2} + \frac{1-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-h}{2t(t-1)}
$$

Setzt man nun $\alpha_1 = m - \frac{1}{2}$ $\alpha_2 = n - \frac{1}{2}$, $\beta = \sqrt{-h}$, so sind $\alpha_1 \pi$, $\alpha_2 \pi$, $\beta \pi$ die Winkel des sphärischen Dreieckes, welche den Werten 0, 1, ∞ von t in der Abbildung entsprechen. Die partikulären Integrale können immer durch passende Verfügung über die willkürlichen Konstanten so festgelegt werden, daß das sphärische Dreieck von Bogen größter Kreise begrenzt wird[1]).

Betrachtet man jetzt die Abbildung des Flächenstückes M, dessen sphärisches Bild S_1 soeben bestimmt wurde, auf die V-Ebene. Aus $t = \sin^2 v$ folgt zunächst: $v = \arcsin \sqrt{t}$. Diesen Ausdruck bringt man auf die Form:

$$v = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \tag{10.}$$

und deutet diese Formel dahin, daß dadurch die Abbildung eines in der Ebene V gelegenen Flächenstückes E, das begrenzt wird einerseits von 2 Parallelen zur X-Achse, andererseits von einer Parallelen zur Y-Achse, auf die T-Ebene in der Weise vermittelt wird, daß den Schnittpunkten der Parallelen zur X-Achse mit der Parallelen zur Y-Achse die Werte $t = 0$ bezw. 1 zugeordnet werden. Das ebene Bild E des Flächenstückes M wird also von 2 zur X-Achse und einer zur Y-Achse parallelen Geraden gebildet. Infolgedessen ist das Minimalflächenstück M von Asymptotenlinien begrenzt, die gerade Linien sein müssen, wenn das sphärische Bild von größten Kreisen der Kugel begrenzt wird, die aber Schraubenlinien sind, wenn das sphärische Bild von Kleinkreisbogen eingeschlossen wird. Demnach kann man den folgenden Satz aussprechen:

Die Flächenstücke, die unter Zugrundelegung der Gleichung (1.) gewonnen werden können, sind dadurch ausgezeichnet, daß sie von 3 Geraden begrenzt werden, von denen eine Gerade die beiden anderen schneidet, so daß sich ein ins Unendliche sich erstreckender Sektor auf der Fläche findet. Die durch Spiegelung des Stückes M an den einzelnen Geraden entstehenden Flächenstücke geben bei richtiger Zusammensetzung die Flächen in ihrer Gesamtausdehnung. Für diese und ihre assoziierten Flächen läßt sich die Aufgabe der infinitesimalen Deformation in allgemeinster Weise lösen.

---

[1]) cf. Darboux I. p. 474—477.

§ 4.

Fall (IV.), wo $\frac{\partial^2\Theta}{\partial v_1^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v_2^2} = \Big[e(v_1) - e(v_2)\Big]\,\Theta.$

Im Falle (IV.) hängt die Bestimmung der Flächen von elliptischen Funktionen ab, wie die Gleichung zur Bestimmung von $\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}$ erkennen läßt. Es ist:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}\right)'' = \left(\frac{m_1(m_1-1)}{sn^2(v)} + m_2(m_2-1)\frac{dn^2(v)}{cn^2(v)} + m_3(m_3-1)k^2\frac{cn^2(v)}{dn^2(v)}\right.\\ &\qquad\qquad \left. + m_4(m_4-1)k^2 sn^2(v) + h\right)\frac{1}{\sqrt{W'(v)}}.\end{aligned}\right.$$

Auf diese Gleichung wende man die Transformationsformeln an:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned} &t = sn^2 v,\\ &\frac{1}{\sqrt{W'(v)}} = \psi(t)\, t^{\frac{m_1}{2}}(1-t)^{\frac{m_2}{2}}(1-k^2 t)^{\frac{m_3}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Man erhält dann die Differentialgleichung für ψ:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left[\frac{\alpha_1+1}{t} + \frac{\alpha_2+1}{t-1} + \frac{(\alpha_3+1)k^3}{k^2t-1}\right]\frac{d\psi}{dt} + \left[\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{t(t-1)}\right.\\ &\left. + \frac{(\alpha_1+1)(\alpha_3+1)k^2}{t(k^2t-1)} + \frac{(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)k^2}{t(k^2t-1)} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t-1} + \frac{k^2h_3}{k^2t-1}\right]\psi = 0\end{aligned}\right.$$

in welcher zur Abkürzung:

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} &m_1 - \frac{1}{2} = \alpha_1,\quad m_2 - \frac{1}{2} = \alpha_2,\quad m_3 - \frac{1}{2} = \alpha_3,\quad m_4 - \frac{1}{2} = \alpha_4,\\ &h_1 = -\frac{1}{2}[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + h + k^2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2)],\\ &h_2 = \frac{1}{2(1-k^2)}[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + h + k^2(-\alpha_2^2 + \alpha_4^2)],\\ &h_3 = \frac{k^2}{2(1-k^2)}[\alpha_3^2 - \alpha_4^2 - h - k^2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2)]\end{aligned}\right.$$

gesetzt ist. Die Größen h erfüllen die Bedingung $\Sigma h_i = 0$; außerdem ist:

$$(4'.)\quad \frac{1-\alpha_1^2}{2} + \frac{1-\alpha_2^2}{2} + \frac{1-\alpha_3^2}{2} + h_2 + \frac{h_3}{k^2} = \frac{1-\alpha_4^2}{2}.$$

Stellt man die Differentialgleichung auf, welcher der Quotient der beiden zu ermittelnden partikulären Integrale der Differentialgleichung (3.) für ψ genügen muß, so findet man:

$$(5.)\left\{u, t\right\} = \frac{1-\alpha_1^2}{2t^2} + \frac{1-\alpha_2^2}{2(t-1)^2} + \frac{(1-\alpha_3^2)k^4}{2(k^2t-1)^2} + \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t} + \frac{h_3 k^2}{k^2t-1}.$$

Durch diese Differentialgleichung wird nun die Abbildung eines von Kugelkreisen begrenzten sphärischen Viereckes vermittelt, in der Weise, daß $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, $\alpha_4\pi$ die Winkel des sphärischen Viereckes bezeichnen, die den Werten $0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty$ von t entsprechen.

Aus $t = sn^2 v$ folgt:

$$dv = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}},$$

Diese Formel läßt erkennen, daß das ebene Bild des Flächenstückes M ein Rechteck ist, das gebildet wird von je 2 parallelen Geraden zur X- und Y-Achse. Man hat demnach, da die Erwägungen zum Schlusse des § 3 auch hier angestellt werden können, das Resultat:

Die zum Falle (IV.) gehörigen Flächen haben die Eigenschaft, daß sie aus einem von einem windschiefen Viereck begrenzten Flächenstück M abgeleitet werden können.

Es zeigt sich also, daß fast auf allen in Betracht gezogenen Flächen ein im allgemeinsten Falle von 4 Geraden begrenztes Minimalflächenstück angegeben werden kann. Die zugehörigen allgemeinen Flächenstücke sind zu diesem Flächenstück assoziiert, also im allgemeinen von Schraubenlinien begrenzt; im speziellen Falle werden ebene Kurven auftreten als Begrenzungslinien, deren Ebene die Fläche unter rechtem Winkel schneidet.

Lebenslauf.

Ich, Josef Zillig, wurde am 20. August 1881 zu Ebensfeld, Bezirksamt Staffelstein, als Sohn der Ökonomeneheleute Johann Zillig und Anna, geb. Weinkauf, geboren und in der katholischen Religion erzogen. Ich besuchte die Volksschule zu Ebensfeld, das Progymnasium Donauwörth, die Gymnasien zu Münnerstadt und Bamberg. Nach Ablegung des Absolutoriums am kgl. neuen Gymnasium zu Bamberg im Jahre 1901 hörte ich im Wintersemester 1901/02 am kgl. Lyzeum zu Bamberg Vorlesungen aus dem Gebiete der Philosophie, widmete mich aber dann ausschließlich dem Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten zu Würzburg (S.S. 1901 bis S.S. 1904) und München (W.S. 1904/05, S.S. 1905). Ich hörte die Vorlesungen folgender Herren Professoren und Dozenten: Cantor, Grätz, Hantzsch, Lindemann, Müller, Pringsheim, Prym, Rost, Seitz, Selling, Voß, Wien.

Allen meinen verehrten Lehrern, besonders den Herren: Prof. Dr. Friedrich Prym, Prof. Dr. Georg Rost, Prof. Dr. Aurel Voß, fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet.

Nach bestandenem Lehramtsexamen war ich als Lehramtspraktikant vom November 1905 bis Juli 1906 am kgl. Theresiengymnasium München. Seit 1. Oktober 1906 bin ich Assistent am mathematischen Seminar der Universität Würzburg.

Die mündliche Prüfung fand am 20. Juli 1908 statt.